CANPOINT®

导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学1

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

必修第一册 BS

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

导学案 第一章　预备知识

§1　集合

1.1　集合的概念与表示

【学习目标】

1. 通过实例了解与集合有关的概念(元素、集合、有限集、无限集、空集),初步掌握常用数集及集合的表示方法,发展数学抽象素养.

2. 通过选用不同的方法表示一个集合,体会元素与集合之间的关系,感受集合中元素的确定性、互异性、无序性.

3. 在学习集合语言的过程中,增强学生通过性质辨别不同事物的能力,并进行分类表达.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　集合的概念及元素的特征

1. 集合与元素的概念:一般地,我们把指定的某些对象的________称为集合,集合中的每个对象叫作这个集合的________.

2. 符号表示:集合通常用大写英文字母 A,B,C,…表示,元素通常用小写英文字母 a,b,c,…表示.如果元素 a 在集合 A 中,就说元素 a 属于集合 A,记作________;如果元素 a 不在集合 A 中,就说元素 a 不属于集合 A,记作__________.

3. 常用的数集及其记法:

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	正实数集
记法	____	____或____	____	____	____	____

4. 集合中元素的三个特性为__________、________、无序性.

5. 空集:我们把不含任何元素的集合叫作空集,记作$\varnothing$.

6. 含有有限个元素的集合叫作有限集;含有无限个元素的集合叫作无限集.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)中国著名的旅游景区构成一个集合.　(　　)

(2)$|-3|\notin \mathbf{N}$.　(　　)

(3)若 $a\in A$,$b\in A$,则 $a\neq b$.　(　　)

(4)$\{a,b,c\}$和$\{c,b,a\}$表示同一个集合.　(　　)

◆ 知识点二　集合的表示法

1. 列举法:把集合中的元素一一列举出来写在__________内表示集合的方法,一般可将集合表示为$\{a,b,c,\cdots\}$.(注意元素间要用","隔开,如$\{-1,0,1,2\}$)

2. 描述法:通过描述元素满足的条件表示集合的方法.一般可将集合表示为$\{x$ 及 x 的范围$|x$ 满足的条件$\}$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

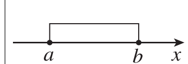
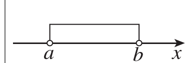
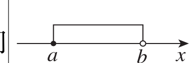
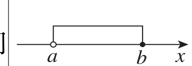
(1)方程$(x-1)(x+2)=0$的实数根组成的集合为$\{1,-2\}$.　(　　)

(2)函数 $y=-x+4$ 的图象与坐标轴的交点组成的集合为$\{0,4\}$.　(　　)

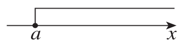
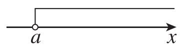
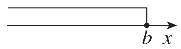
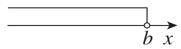
(3)集合$\{x\in\mathbf{R}|-1<x<2\}$与集合$\{y\in\mathbf{R}|-1<y<2\}$表示同一个集合.　(　　)

◆ 知识点三　区间及其表示

1. 区间的概念(a,b 是两个实数,且 $a<b$)

定义	符号	名称	数轴表示
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	______	闭区间	
$\{x\|a<x<b\}$	______	开区间	
$\{x\|a\leqslant x<b\}$	______	半开半闭区间	
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	______	半开半闭区间	

2. 其他区间的表示

定义	符号	数轴表示
$\{x\mid x\geqslant a\}$	________	
$\{x\mid x>a\}$	________	
$\{x\mid x\leqslant b\}$	________	
$\{x\mid x<b\}$	________	

特别地,实数集 $\mathbf{R}$ 可以表示为________.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"∞"表示的是一个数. ( )

(2)$\{x\mid 5\geqslant x\geqslant 1\}$用区间可表示为$[5,1]$. ( )

(3)$\{x\mid x\geqslant 1\}$可表示为$(1,+\infty]$. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　集合的概念

例 1 (1)(多选题)下列对象中能组成集合的是 ( )

A. 著名的科学家

B. 中国的直辖市

C. 所有的偶数

D. 所有的直角三角形

(2)下列对象中能组成集合的是:①某省所有的好学校;②直角坐标系中横坐标与纵坐标互为相反数的点;③π 的近似值;④小于 5 的自然数. ( )

A. ①②　　B. ②③

C. ②④　　D. ③④

[素养小结]

判断给定的对象能不能构成集合,关键在于能否找到一个明确的标准,使得对于任何一个对象,都能按此标准确定它是不是给定集合的元素.

◆ 探究点二　元素与集合的关系

例 2 (1)下列表示正确的是 ( )

A. $0\in\mathbf{N}^*$　　B. $\frac{1}{2}\in\mathbf{Z}$

C. $\pi\in\mathbf{Q}$　　D. $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$

(2)(多选题)下列关系中正确的是 ( )

A. $2\sqrt{3}\notin\{x\mid x<\sqrt{11}\}$

B. $1\in\varnothing$

C. $4\in\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}_+\}$

D. $(1,3)\in\{(x,y)\mid y=2x+1\}$

变式 (1)(多选题)下列结论正确的是 ( )

A. $\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$　　B. $\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$

C. $-1\in\mathbf{N}_+$　　D. $-5\in\mathbf{Z}$

(2)已知集合 A 是由形如 $m+\sqrt{3}n$(其中 $m,n\in\mathbf{Z}$)的数组成的,请判断 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 是否为集合 A 中的元素.

[素养小结]

判断一个对象是不是某集合中的元素,首先要明确已知集合中的元素具有怎样的特征,即集合中的元素要符合哪些表达式或满足哪些条件,然后再判断此对象是否也具有这种特征,从而确定该对象与已知集合的关系.

◆ 探究点三　集合中元素特性的简单应用

例 3 (1)(多选题)设集合 $A=\{-1,1+a,a^2-2a+5\}$,若 $4\in A$,则 a 的值可能为 ( )

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 3

(2)已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,且 a_1,a_2,a_3,a_4 均为正数,则以 a_1,a_2,a_3,a_4 为边长构成的四边形可能是 ( )

A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 菱形　　D. 梯形

变式 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[5]{x^5}$ 组成的集合最多有 ( )

A. 3 个元素　　B. 2 个元素

C. 4 个元素　　D. 5 个元素

[素养小结]

集合中的元素应具有确定性、互异性和无序性,在解决与参数相关的问题时,一定要确保参数的值满足集合中元素的互异性,否则应舍去.

◆ **探究点四　集合的表示法**

例 4　用适当的方法表示下列集合，并指明是无限集、有限集还是空集.

(1)满足不等式 $2x-1>3x$ 的解组成的集合；

(2)由方程 $x^2+x+1=0$ 的实数解组成的集合；

(3)由一次函数 $y=-x+3$ 与 $y=2x+6$ 的图象的交点组成的集合；

(4)不大于 10 的正偶数组成的集合.

变式　用适当的方法表示下列集合.

(1)大于 2 且小于 6 的自然数组成的集合 P；

(2)方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的所有解组成的集合；

(3)大于 4 且不大于 5 的实数组成的集合.

[素养小结]

(1)用列举法表示集合应注意：

①弄清集合中的元素是什么，是数还是点，还是其他元素.

②若集合中的元素是点，则应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

(2)利用描述法表示集合应注意：

①写清楚该集合的代表元素.

②在通常情况下，集合中竖线左侧元素的所属范围为实数集时可以省略不写.

1.2　集合的基本关系

【学习目标】

1. 了解集合之间的包含、相等关系的含义.
2. 理解子集、真子集的概念.
3. 能利用 Venn 图表达集合间的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　子集**

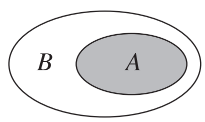
1. 子集：一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，那么称集合 A 是集合 B 的子集，记作________(或________)，读作“A________B”(或“B________A”).

2. 子集的性质：

(1)任何一个集合都是它本身的子集，即________.

(2)规定：空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任意一个集合 A，都有________.

3. Venn 图：为了直观地表示集合间的关系，常用平面上封闭曲线的内部表示集合，称为 Venn 图. 如 $A\subseteq B$，可用 Venn 图(如图)表示.



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.　(　　)

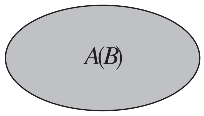
(2)若 $A\subseteq B$，则集合 A 是由集合 B 的部分元素组成的.　(　　)

(3)$\{0\}\subseteq \mathbf{Z}$，$\varnothing\subseteq\{1,2\}$.　(　　)

◆ **知识点二　集合相等**

1. 定义：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 也是集合 A 的子集，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

2. 表示:可用 Venn 图(如图)表示.即对于两个集合 A 与 B,若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.



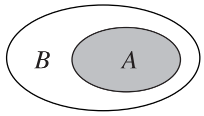
【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $x\in A$ 且 $x\in B$,则 $A=B$. ( )

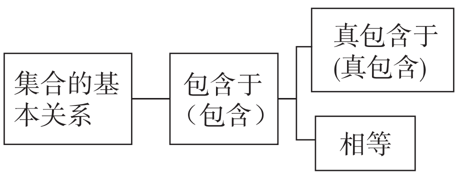
(2)$\{2,7\}=\{(2,7)\}$. ( )

◆ 知识点三 真子集

1. 真子集:对于两个集合 A 与 B,如果______,且________,那么称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$),读作"A__________B"(或"B__________A").可用 Venn 图(如图)表示.



2. 集合的基本关系(如图):



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $A\subsetneqq B$,则集合 A,B 都是非空集合. ( )

(2)$\{x|x>3\}\subsetneqq\{x|x\geqslant 3\}$. ( )

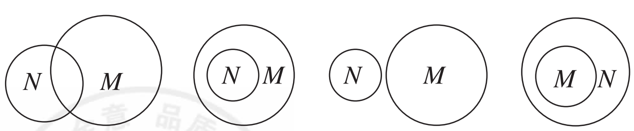
(3)当 $A\subsetneqq B$ 时,$A\subseteq B$ 一定成立. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 判断集合之间的关系

例 1 (1)下列表示集合 $M=\{1,-1,2,-2\}$和集合 $N=\{x|x^2-4=0\}$关系的 Venn 图中正确的是 ( )



A　　B　　C　　D

(2)已知集合 $P=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$,集合 $Q=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$,则 P 与 Q 的关系是 ( )

A. $P=Q$　　B. $P\subseteq Q$

C. $Q\subseteq P$　　D. $Q\subsetneqq P$

(3)(多选题)已知集合 $A=\{x|x>2\}$,$B=\{x|x>3\}$,则下列说法中正确的是 ( )

A. 存在 $x\in A$,使 $x\notin B$

B. 对于任意的 $x\in A$,都有 $x\in B$

C. $A\subseteq B$

D. B 是 A 的真子集

变式 判断下列各组中两个集合之间的关系.

(1)集合 $A=\{-1,1\}$与 $B=\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$;

(2)集合 $A=\{x|-1<x<4\}$与 $B=\{x|x-5<0\}$;

(3)集合 $A=\{x|x$ 是等边三角形$\}$与 $B=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$;

(4)集合 $M=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$与 $N=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N}^*\}$;

(5)集合 $A=\{x|x=2a+3b,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$与 $B=\{x|x=4m-3n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$.

[素养小结]

判断集合间关系的方法:

(1)用定义判断.(2)结合数轴判断.(3)用 Venn 图判断.

◆ 探究点二 确定有限集合的子集、真子集

[提问] 当所给集合中元素的个数较少时,求其子集(或真子集)的个数可采用什么方法?

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-4x+3=0\}$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,写出满足 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C.

变式 1 若集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|m<x<4\}$ 有 15 个真子集,则实数 m 的取值范围为 ( )

A. $[-1,0)$ B. $(-1,0]$

C. $(-1,0)$ D. $[-1,0]$

变式 2 设 Y 是由 6 的所有正约数组成的集合,写出集合 Y 的所有子集.

[素养小结]

1. 对于含有有限个元素的集合,求该集合的子集或真子集时,有三个关键点:

(1)确定该集合;

(2)合理分类;

(3)注意两个特殊的集合,即空集和集合本身.

2. 非空集合(元素个数为 n)的子集的个数为 2^n.

拓展 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 2, x\in \mathbf{N}\}$,若 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$,则满足条件的集合 B 的个数为 ( )

A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

◆ 探究点三 由集合的基本关系求参数

例 3 (1)设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,$N=\{x\mid x-k\leqslant 0\}$,若 $M\subseteq N$,则 k 的取值范围是 ( )

A. $k\leqslant 2$ B. $k\geqslant 2$

C. $k>-1$ D. $k\leqslant -1$

(2)设集合 $A=\{x\mid x^2-9x+14=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 a 的值组成的集合 $C=$__________.

(3)已知集合 $A=\{2,x,y\}$,$B=\{2x,2,y^2\}$,且 $A=B$,求实数 x,y 的值.

变式 已知 $a>0$,集合 $A=\{x\mid 1-a\leqslant x\leqslant 1+a\}$,$B=\{x\mid x\leqslant 3$,或 $x\geqslant 4\}$. 若 $A\subsetneqq B$,则实数 a 的取值范围是________.

[素养小结]

根据集合的关系求参数的值或取值范围时,需要把集合语言转换为方程或不等式,然后灵活应用解方程的方法或利用数形结合求解. 要特别注意考虑 $\varnothing$ 是否满足题意.

拓展 已知集合 $A=\{x\mid ax=1\}$,$B=\{x\mid x^2+3x-4=0\}$,是否存在实数 a,使 $B\subseteq A$ 成立?并说明理由.

1.3 集合的基本运算

第 1 课时 集合的基本运算(一)—— 交集与并集

【学习目标】

1. 理解两个集合的交集与并集的含义,会求两个简单集合的交集与并集.
2. 能使用 Venn 图表达集合的基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

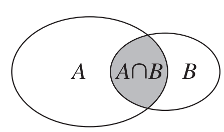
课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 交集

1. 交集的概念:

定义	一般地,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,叫作集合 A 与 B 的交集

(续表)

符号表示	记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",即 $A\cap B=$__________
图形表示	

2. 交集的性质：

(1)$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B$________$B$.

(2)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B$________A，反之也成立.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cap B=3$. ( )

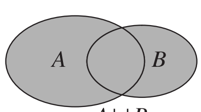
(2)若集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=\{2,3\}$. ( )

(3)已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，因为集合 A，B 中没有公共元素，所以 $A\cap B$ 不能用一个集合来表示. ( )

2. 请用 Venn 图表示两个集合在不同关系下的交集.

◆ 知识点二 并集

1. 并集的概念：

定义	一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫作集合 A 与 B 的并集
符号表示	记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=$________
图形表示	 $A\cup B$

2. 并集的性质：

(1)$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$，$A\subseteq A\cup B$，B________$A\cup B$.

(2)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B$________B，反之也成立.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$. ( )

(2)若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cup B$ 中共有 5 个元素. ( )

(3)若集合 $A=\{1\}$，$A\cup B=\{1,2\}$，则集合 $B=\{2\}$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 交、并集的基本运算

例 1 (1)已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{1,2,3\}$

B. $\{x\mid 1<x<3\}$

C. $\{1,2\}$

D. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$

(2)(多选题)已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，则下列说法中正确的是 ( )

A. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$

B. $A\cap B=\varnothing$

C. $A\cup B=\mathbf{R}$

D. $A\cup B=\{x\mid x<2\}$

(3)已知集合 $P=(-1,1)$，$Q=(0,2)$，则 $P\cup Q=$________.

(4)已知 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，则 $A\cap B$ 等于________.

[素养小结]

并集运算应注意的问题：(1)若求两个集合的并集，则重复的元素只能算一个；(2)进行并集运算时，可借助数轴或 Venn 图.

交集运算应注意的问题：(1)注意点集与数集的交集是空集；(2)对于数集交集运算，可以利用数轴来求解，利用数轴表示不等式时，含有端点的值用实心点表示，不含有端点的值用空心点表示.

◆ 探究点二 由集合运算的概念及性质求参数

例 2 (1)已知 $A=[-2,2]$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $\{a\mid a>2\}$

B. $\{a\mid a>-2\}$

C. $\{a\mid a\geqslant 2\}$

D. $\{a\mid a\leqslant -2\}$

(2)已知集合 $A=\{0,2a-1,a^2\}$, $B=\{a-5,1-a,9\}$, 且 $A\cap B=\{9\}$, 求实数 a 的值.

变式 已知集合 $P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$, $M=\{-a,a\}$. 若 $P\cup M=P$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$

B. $\{a\mid -1<a<1\}$

C. $\{a\mid -1<a<1$ 且 $a\neq 0\}$

D. $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1$ 且 $a\neq 0\}$

[素养小结]

已知集合的交集或并集求参数的值或取值范围时，关键是利用元素与集合的关系分类讨论求解，并且要注意利用集合中元素的互异性进行检验. 有时还需要利用交集、并集的性质将问题转化为集合间的包含关系来求解.

拓展 (1)已知集合 $M=\{1,a^2\}$, $P=\{-1,-a\}$, 若 $M\cup P$ 中有三个元素, 则 $M\cap P=$ ( )

A. $\{0,1\}$ B. $\{0,-1\}$

C. $\{0\}$ D. $\{-1\}$

(2)设集合 $A=\{x\mid 2a<x<a+2\}$, $B=\{x\mid x<-3$, 或 $x>5\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ D. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

第 2 课时 集合的基本运算(二)——全集与补集

【学习目标】

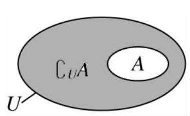
1. 在具体情境中，了解全集的含义.
2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集.
3. 能使用 Venn 图表达集合的基本运算，体会图形对理解抽象概念的作用.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点 全集与补集

1. 全集的概念：在研究某些集合的时候，它们往往是某个给定集合的子集，这个给定的集合叫作全集，常用符号______表示.

2. 补集的概念：

定义	设 U 是全集，A 是 U 的一个子集(即 $A\subseteq U$)，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 U 中子集 A 的补集
符号表示	记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=$______
图形表示	

3. 补集的性质：

(1) $A\cup(\complement_U A)=$______, $A\cap(\complement_U A)=$______.

(2) $\complement_U(\complement_U A)=$______, $\complement_U U=$______, $\complement_U\varnothing=$______.

(3) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$, $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若全集 $U=\{1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U A=1$. ( )

(2)若集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{3\}$, 则 $\complement_A B=\{2,4\}$, $\complement_B C=\{1,2,4,5\}$. ( )

(3)若集合 $A=\{1,3,5\}$, $\complement_U A=\{2,4\}$, 则 $U=\{1,2,3,4,5\}$. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　补集的运算

例 1　(1)已知集合 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$,$M=\{3,4,5\}$,则 $\complement_U M=$　(　　)

A. $\{0,1,2,3,4,5\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

(2)已知集合 $A=(1,+\infty)$,则 $\complement_{\mathbf{R}} A=$　(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $[-1,+\infty)$

(3)已知全集 $U=\{x\mid x$ 是实数$\}$,$A=\{x\mid x$ 是有理数$\}$,则 $\complement_U A=$____________.

[素养小结]

求集合补集的方法:(1)定义法:当集合是由列举法表示时,可利用定义直接求解.(2)Venn 图法:借助 Venn 图可直观地求出补集.(3)数轴法:当集合是用描述法表示的连续数集时,可借助数轴求解,但需注意端点能否取到.

◆ 探究点二　交集、并集、补集的混合运算

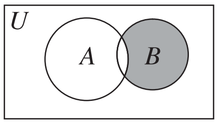
例 2　已知集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$,$B=\{x\mid 2<x<10\}$,求 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$,$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$,$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

变式　(1)设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 4\}$,集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$　(　　)

A. $\{0,4\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\varnothing$

(2)已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,集合 $A=\{1,3,4,8\}$,$B=\{2,4,5,6\}$,则图中阴影部分所表示的集合是　(　　)



A. $\{2,5\}$　　B. $\{4,6\}$

C. $\{2,5,6\}$　　D. $\{1,3,8\}$

[素养小结]

交集、并集、补集的综合运算问题的解法:(1)对于有限集,先把集合中的元素一一列举出来,再结合交集、并集、补集的定义求解,在解答过程中也常常借助于 Venn 图.(2)对于连续的无限集,常借助于数轴,先把已知集合及全集分别表示在数轴上,再根据交集、并集、补集的定义求解,解答过程中注意端点值的取舍.

◆ 探究点三　由补集运算求参数

例 3　设集合 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid -2<x<4\}$,全集 $U=\mathbf{R}$,且$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

变式　(1)设全集 $U=\{1,2,3,4\}$,集合 $M=\{x\in U\mid x^2-5x+p=0\}$,若 $\complement_U M=\{1,4\}$,则 p 的值为　(　　)

A. -4　　B. 4

C. -6　　D. 6

(2)(多选题)[2024・河南济源高级中学高一月考] 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x\leqslant a\}$,集合 $B=\{x\mid x<1\}$,则下列说法中正确的是　(　　)

A. 若 $B\cup(\complement_U A)=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$

B. 若 $B\cup(\complement_U A)=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$

C. 若 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$

D. 若 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$

[素养小结]

根据补集的运算结果求参数的值或取值范围时,关键是利用补集的定义,即补集 $\complement_U A$ 中的元素在全集中不在集合 A 中,列方程(组)求解.但要注意分类讨论并检验所得结果是否保证 U 是全集、是否满足集合中元素的互异性.

§2　常用逻辑用语

2.1　必要条件与充分条件

第1课时　必要条件与充分条件

【学习目标】

1. 理解必要条件、充分条件的概念.
2. 能够判断命题之间的充分、必要关系.
3. 通过对必要条件、充分条件的概念的理解和运用,培养学生分析、判断和归纳的逻辑思维能力.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　必要条件与性质定理**

一般地,当命题"若 p,则 q"是真命题时,称 q 是 p 的______条件.也就是说,一旦 q 不成立,p 一定也不成立,即 q 对于 p 的成立是必要的.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $A=\{中学生\}$,$B=\{学生\}$,则"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要条件.　(　　)

(2)"$x>5$"是"$x>3$"的必要条件.　(　　)

◆ **知识点二　充分条件与判定定理**

一般地,当命题"若 p,则 q"是真命题时,称 p 是 q 的________条件.

对于真命题"若 p,则 q",即 $p\Rightarrow q$ 时,称 q 是 p 的________条件,也称 p 是 q 的________条件.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"两个三角形的面积相等"是"两个三角形全等"的充分条件.　(　　)

(2)若 p 是 q 的必要条件,则 q 是 p 的充分条件.　(　　)

2. 如果 p 是 q 的充分条件,q 是 r 的充分条件,那么 p 是 r 的充分条件吗?

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　必要条件的判定**

例1　下列所给的各组 p,q 中,判断 p 是否为 q 的必要条件,q 是否为 p 的必要条件.

(1)p:$x>1$,q:$x^2>1$;

(2)p:四边形的对角线相等,q:四边形是矩形;

(3)p:两个三角形相似,q:两个三角形的对应角相等.

变式　(多选题)[2024·四川绵阳中学月考]下列命题中,p 是 q 的必要条件的有　(　　)

A. p:x,y 是偶数,q:$x+y$ 是偶数

B. p:$a<2$,q:方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根

C. p:四边形的对角线互相垂直,q:四边形是菱形

D. p:$ab=0$,q:$a=0$

[素养小结]

(1)判断 q 是否为 p 的必要条件时,主要判断"若 p 成立,能否推出 q 成立",若 $p\Rightarrow q$,则 q 是 p 的必要条件;判断 p 是否为 q 的必要条件时,主要判断"若 q 成立,能否推出 p 成立",若 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要条件.

(2)也可利用集合的关系判断,已知甲:$x\in A$,乙:$x\in B$,若 $A\supseteq B$,则甲是乙的必要条件.

◆ 探究点二　充分条件的判定

例 2　下列所给的各组 p，q 中，判断 p 是否为 q 的充分条件，q 是否为 p 的充分条件.

(1) p：$a\in A\cap B$，q：$a\in A\cup B$；

(2) p：$x>5$ 或 $x<-5$；q：$x<-5$；

(3) p：两个三角形的三边成比例，q：两个三角形相似；

(4) p：$x^2=1$，q：$x=1$；

(5) p：$a=b$，q：$ac=bc$.

变式　(多选题)[2024·四川绵阳高一期中] 下列选项中满足 p 是 q 的充分条件的是　　(　　)

A. p：$x>\sqrt{2}$，q：$x>1$

B. p：$m=0$，q：$mn=0$

C. p：$x^2\neq 0$，q：$x\neq 0$

D. p：$x>y$，q：$x^2>y^2$

[素养小结]

(1)判断 p 是 q 的充分条件时，主要判断“若 p 成立，能否推出 q 成立”，若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件.

(2)也可利用集合的关系判断，已知甲：$x\in A$，乙：$x\in B$，若 $A\subseteq B$，则甲是乙的充分条件.

◆ 探究点三　由必要条件、充分条件求参数的范围

例 3　[2024·江苏宿迁青华中学高一月考] 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，非空集合 $B=\{x\mid 2-a\leqslant x\leqslant 1+2a\}$.

(1)若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，求实数 a 的取值范围；

(2)若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，求实数 a 的取值范围.

变式　设 p：$x<1$，q：$x<a$，若 p 是 q 的充分条件，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $a>1$　　B. $a<1$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a\leqslant 1$

[素养小结]

利用必要条件或充分条件求参数的值或取值范围，关键是将已知条件转化为集合间的包含关系，再通过解不等式(组)来求解. 但要注意集合为空集的情况，还要注意等号的取舍.

第 2 课时　充要条件

【学习目标】

1. 理解充要条件的定义，掌握充分、必要条件的四种类型.

2. 会判断条件和结论的关系.

3. 通过判断 p 与 q 的关系引导充要条件的定义，由诱导探究的方法归纳出判断“p 是 q 的什么条件”的步骤及方法(定义法、集合法、传递法).

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点　充要条件

1. 一般地，如果 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的充分且必要条件，简称 p 是 q 的________，记作 p________q.

p 是 q 的充要条件也常常说成“p 成立当且仅当 q 成立”，或“p 与 q 等价”.

当 p 是 q 的充要条件时，q 也是 p 的充要条件.

2. 如果 $p\Rightarrow q$，$q\nRightarrow p$，则称 p 是 q 的充分不必要条件；

如果 $p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的必要不充分条件；

如果 $p\nRightarrow q$，$q\nRightarrow p$，则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"$x=y=0$"是"$x^2+y^2=0$"的充要条件.( )

(2)若"p 不能推出 q"和"q 不能推出 p"有一个成立,则 p 一定不是 q 的充要条件. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 充要条件的判定

例 1 (1)设 A,B 是两个集合,则"$A\subseteq B$"是"$A\cup B=B$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)(多选题)[2024·广东东莞东华高级中学月考]下列四个选项中,p 是 q 的充要条件的有 ( )

A. p:三角形是等腰三角形,q:三角形存在两角相等

B. p:两个三角形全等,q:两个三角形的三边分别相等

C. $p:xy>0$,$q:x>0,y>0$

D. p:四边形是正方形,q:四边形的对角线互相垂直且平分

[素养小结]

判断充分条件、必要条件及充要条件的三种方法

(1)定义法:直接判断"若 p,则 q"以及"若 q,则 p"的真假.

(2)集合法:即利用集合之间的包含关系判断.

(3)传递法:充分条件和必要条件具有传递性,即由 $p_1\Rightarrow p_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow p_n$,可得 $p_1\Rightarrow p_n$;充要条件也有传递性.

◆ 探究点二 根据充要条件求参数

例 2 求"关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个不同的正根"的充要条件.(附:由 $a^2-12a+20>0$,得 $a<2$ 或 $a>10$)

变式 [2024·河北邢台翰林中学高一月考]若集合 $A=\{-2,m^2\}$,集合 $B=\{2,4\}$,则"$A\cap B=\{4\}$"的充要条件是 ________.

[素养小结]

p 是 q 的充要条件意味着"p 成立则 q 成立;p 不成立则 q 不成立".已知两个条件为充要条件求参数的值,通常转化为两个集合相等列方程(组)来求解.

◆ 探究点三 充要条件的证明

例 3 求证:"关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1"的充要条件是"$a+b+c=0$".

变式 在△ABC 中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,求证:"$a^2-b^2-ac+bc=0$"的充要条件是"$\angle A=\angle B$".

[素养小结]

有关充要条件的证明问题,要分清哪个是条件,哪个是结论,谁是谁的什么条件.证明充要条件要分两个环节:一是证明充分性成立;二是证明必要性成立.

2.2 全称量词与存在量词

第1课时 全称量词命题与存在量词命题

【学习目标】

1. 掌握常用的全称量词和存在量词及其含义.
2. 掌握全称量词命题和存在量词命题的概念,并能准确判断真假.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ **知识点一 全称量词命题**

1. 全称量词命题:在给定集合中,断言所有元素都具有同一种性质的命题叫作全称量词命题.

2. 全称量词:在命题中,诸如"所有""每一个""任意""任何""一切"这样的词叫作全称量词,用符号"________"表示,读作"对任意的".

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"平行四边形的对角线互相平分"是全称量词命题. (　　)

(2)"能被6整除的数也能被3整除"是全称量词命题. (　　)

(3)"至少有一个实数 x,使得 $|x|=4$"是全称量词命题. (　　)

(4)全称量词命题是陈述某集合中所有元素都具有某种性质的命题. (　　)

2. 全称量词命题中一定含有全称量词吗?

◆ **知识点二 存在量词命题**

1. 存在量词命题:在给定集合中,断言某些元素具有一种性质的命题叫作存在量词命题.

2. 存在量词:在命题中,诸如"有些""有一个""存在"这样的词叫作存在量词. 用符号"______"表示,读作"存在".

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"有些自然数是偶数"是存在量词命题. (　　)

(2)"存在一个菱形,它的四条边不相等"是存在量词命题. (　　)

(3)"对每一个无理数 x,x^2 也是无理数"是存在量词命题. (　　)

(4)存在量词命题是陈述某集合中存在一个或部分元素具有某种性质的命题. (　　)

2. 怎样判定一个存在量词命题的真假?

课中探究

考点探究 素养小结

◆ **探究点一 全称量词命题与存在量词命题的判断与表示**

例1 (1)判断下列给出的命题是全称量词命题,还是存在量词命题?并指出其中的量词.

①存在一个实数,它的绝对值不是正数;

②对任何实数 a,方程 $ax^2+x+1=0$ 都有解;

③在平面直角坐标系中,每一个有序实数对 (x,y) 都对应一个点;

④有一个质数是偶数.

(2)将下列命题用"∀"或"∃"表示.

①实数的平方是非负数;

②方程 $ax^2+2x+1=0(a<1)$ 至少存在一个负实根;

③有一个有理数 x 满足 $x^2=3$.

变式 (多选题)[2024·陕西西安庆安高级中学高一月考] 下列命题是存在量词命题的是 ( )

A. 能被5整除的整数都是偶数

B. 有的偶数是质数

C. 梯形的对角线相等

D. 某些平行四边形不是菱形

[素养小结]

全称量词命题的判断:常用的全称量词有"所有""每一个""任何""任意""一切""任给""全部"等,只要含有这些量词,或者命题具有全称量词所表达的含义,就是全称量词命题.

存在量词命题的判断:常用的存在量词有"有些""有一个""存在""某个""有的"等,只要含有这些量词,或者命题具有存在量词所表达的含义,就是存在量词命题.

◆ 探究点二 全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例2 (多选题)下列命题中,为真命题的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2>0$

B. 空集是任何一个非空集合的真子集

C. $\exists x\in\{-2,-1,0,1,2\}$,使 $|x-2|<2$

D. $\forall a\in\mathbf{R}$,方程 $ax+1=0$ 恰有一解

变式 (多选题)下列命题中为真命题的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^3\geqslant0$

B. $\forall x\in\mathbf{Z}$,有 $|x|\in\mathbf{N}$

C. $\exists x\in\mathbf{Z}$,使 x^2+x 为奇数

D. $\exists x\in\mathbf{N}$,使 $x^3<1$

[素养小结]

(1)要判定一个全称量词命题是真命题,必须对限定集合 M 中的每一个元素 x 证明其具有性质 $p(x)$,但要判定全称量词命题为假命题,只要能举出集合 M 中的一个 x 不具有性质 $p(x)$ 即可,这就是通常所说的"举一个反例";

(2)要判定一个存在量词命题是真命题,只要在限定集合 M 中能找到一个 x 具有性质 $p(x)$ 即可,否则这个存在量词命题就是假命题.

◆ 探究点三 由含量词的命题的真假求参数的范围

例3 (1)若"$\forall x\in[1,2]$,有 $x^2+2x-a<0$"是真命题,求实数 a 的取值范围.

(2)若"$\exists x\in[1,2]$,使 $x^2+2x-a<0$"是真命题,求实数 a 的取值范围.

变式 (1)[2024·辽宁部分学校高一期中] 若"$\exists x\in(-\infty,a]$,使 $x^2=2$"是假命题,则实数 a 的取值范围是________.

(2)已知"$\exists x\in[1,2]$,使 $2x-1\geqslant m$"是真命题,则实数 m 的最大值是________.

[素养小结]

由含量词的命题的真假求参数取值范围的策略:

(1)含参数的全称量词命题为真时,常与不等式恒成立有关,可根据有关代数恒等式,确定参数的取值范围;

(2)含参数的存在量词命题为真时,常转化为方程或不等式有解问题来处理,可借助根的判别式等知识解决.

第 2 课时　全称量词命题与存在量词命题的否定

【学习目标】

1. 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定.
2. 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.
3. 会判断全称量词命题和存在量词命题的否定的真假.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　全称量词命题的否定

全称量词命题 p	p 的否定	结论
$\forall x\in M$, x 具有性质 $p(x)$	________ ________	全称量词命题的否定是________

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)命题"$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2+x+1>0$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1\leqslant 0$".　(　　)

(2)命题"$\forall x\leqslant 0$,有 $x+1\leqslant 1$"的否定是"$\exists x>0$,使 $x+1>1$".　(　　)

◆ 知识点二　存在量词命题的否定

存在量词命题 p	p 的否定	结论
$\exists x\in M$,x 具有性质 $p(x)$	________ ________	存在量词命题的否定是________

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)命题"$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x>1$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x\leqslant 1$".　(　　)

(2)命题"$\exists x>0$,使 $x^2-2x-3=0$"的否定是"$\forall x\leqslant 0$,有 $x^2-2x-3\neq 0$".　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　全称量词命题的否定

例 1　写出下列全称量词命题的否定:

(1)所有能被 3 整除的整数都是奇数;

(2)每一个四边形的四个顶点都共圆;

(3)对任意的 $x\in\mathbf{Z}$,x^2 的个位数字都不等于 3.

变式　(1)命题"$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2\neq x$"的否定是　(　　)

A. $\exists x\notin\mathbf{R}$,使 $x^2\neq x$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2=x$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2\neq x$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2=x$

(2)[2024·西藏林芝二中高一期中] 命题"$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x\geqslant 2x+1$"的否定是　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x<2x+1$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x\leqslant 2x+1$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x\leqslant 2x+1$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x<2x+1$

[素养小结]

写出全称量词命题的否定有两个关键点:(1)找出全称量词命题中的全称量词和结论,把全称量词改为存在量词,结论变为否定的形式就得到了命题的否定.(2)有些全称量词命题省略了全称量词,在这种情况下,千万不要只将否定写成"是"或"不是".

◆ 探究点二　存在量词命题的否定

例 2　写出下列存在量词命题的否定,并判断所得命题的真假.

(1)p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $2x+1\geqslant 0$;

(2)q:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2-x+\frac{1}{4}<0$;

(3)r:有些分数不是有理数.

变式 (1)[2024·安徽江淮十校高一检测] 命题“$\exists x\in(-1,1)$,使 $x^2+2x\leqslant 1$”的否定是 ( )

A. $\exists x\notin(-1,1)$,使 $x^2+2x\leqslant 1$

B. $\exists x\notin(-1,1)$,使 $x^2+2x\geqslant 1$

C. $\forall x\in(-1,1)$,有 $x^2+2x>1$

D. $\forall x\in(-1,1)$,有 $x^2+2x\geqslant 1$

(2)命题“关于 x 的方程 $ax^2-x-2=0$ 在 $(0,+\infty)$上有解”的否定是 ( )

A. $\exists x\in(0,+\infty)$,使 $ax^2-x-2\neq 0$

B. $\forall x\in(0,+\infty)$,有 $ax^2-x-2\neq 0$

C. $\exists x\in(-\infty,0)$,使 $ax^2-x-2=0$

D. $\forall x\in(-\infty,0)$,有 $ax^2-x-2=0$

[素养小结]

写出存在量词命题的否定有两个关键点:(1)先确定它的存在量词和结论,然后再把存在量词改写为全称量词,对结论作出否定就得到了存在量词命题的否定.(2)注意对不同的存在量词的否定的写法,例如,“存在”的否定是“任意的”,“有一个”的否定是“所有的”或“任意一个”等.

◆ **探究点三　由全称量词命题与存在量词命题真假求参数的范围**

例 3 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x^2-4x+a\neq 0$”为假命题,求实数 a 的取值范围.

变式 (1)若“$\exists x\in\mathbf{R}$,使$|x|+m<0$”是假命题,则实数 m 的取值范围是________.

(2)[2024·山东平邑一中高一月考] 若命题“$\exists x\in[-1,2]$,使 $x-a>0$”为假命题,则实数 a 的取值范围是________.

[素养小结]

已知全称量词命题、存在量词命题为假求参数范围的问题,通常先写出该命题的否定,再利用该命题的否定为真,将其转化为最值问题来求解.

§3　不等式

3.1　不等式的性质

【学习目标】

1. 通过具体情境,感受、理解不等关系在现实生活中是普遍存在的.
2. 掌握不等式的基本性质,运用基本性质比较两个实数的大小,掌握证明不等式的基本方法“作差法”.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　不等关系基本事实**

关于实数 a,b 大小的比较,有以下基本事实:

如果 $a-b$ 是正数,那么 $a>b$;

如果 $a-b$ 等于 0,那么 $a=b$;

如果 $a-b$ 是负数,那么 $a<b$.反过来也成立.

这个基本事实可以表示为 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

◆ **知识点二　不等式的性质**

序号	别名	性质内容	注意
1	传递性	$a>b,b>c\Rightarrow a>c$	不可逆
2	可加性	$a>b\Leftrightarrow a+c$ ________ $b+c$	可逆
3	可乘性	$a>b,c>0\Rightarrow ac$ ______ bc $a>b,c<0\Rightarrow ac$ ______ bc	c 的符号
4	同向可加性	$a>b,c>d\Rightarrow a+c$ ________ $b+d$	不可逆

（续表）

序号	别名	性质内容	注意
5	同向正值可乘性	$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac$ ________ bd	不可逆
		$a>b>0,c<d<0\Rightarrow ac$ ________ bd	
6	可开方性	$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$	$n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant2$

特殊地，当 $a>b>0$ 时，$a^n>b^n$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant2$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $a>b,c>d$，则 $a-c>b-d$. ( )

(2)若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$. ( )

(3)若 $b>0$，且 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 比较大小

例 1 (1)[2024·中央民族大学附中高一月考] 设 $a=\sqrt{7},b=3-\sqrt{3}$，则 a ______ b.(填">"或"<")

(2)已知 $x\in\mathbf{R}$，比较 x^3-1 与 $2x^2-2x$ 的大小.

变式 已知 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{7}-\sqrt{3},c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则 a，b，c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$

C. $c>a>b$ D. $c>b>a$

[素养小结]

作差法比较两个实数(或代数式)的大小的一般步骤为作差、变形、判断符号、得到结论.这里的"判断符号"是目的，"变形"是关键.其中变形的方法技巧较多，常见的有因式分解法、配方法、有理化法等.若变形后所得式子的符号不能确定，则需要通过分类讨论来进行大小的比较.

◆ 探究点二 不等式性质的应用

例 2 (1)若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $a+c<b+c$ B. $ac>bc$

C. $\frac{c^2}{a-b}>0$ D. $(a-b)c^2\geqslant0$

(2)已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，求证：$\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

变式 (1)(多选题)[2024·江苏徐州高级中学高一期中] 已知 a,b,c,d 都是正数，且 $a>b,c>d$，则下列关系式中正确的有 ( )

A. $a-c<b-d$

B. $a+c>b+d$

C. $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$

D. $\frac{a+c}{b+c}<\frac{a+d}{b+d}$

(2)已知 $a,b,x,y\in(0,+\infty)$，且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$x>y$，求证：$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$.

[素养小结]

利用不等式的性质进行不等式的证明，常用方法有两种：一是通过作差、变形、判断符号来证明；二是从条件出发，结合不等式的性质，不断变形构造出所证不等式.